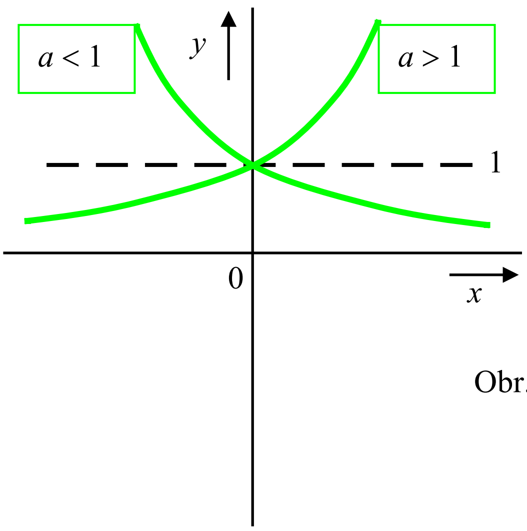
Exponenciální funkce a jejich "využití" - A

(Tato doplňková pomůcka nemůže v žádném případě nahradit systematickou matematickou přípravu .)

Exponenciální funkce je definována obecně vztahem

$$y = a^x \tag{1}$$

pro x z oboru reálných čísel je vždy kladná. Pro $a > 1$ se jedná o funkci rostoucí; pro $a < 1$ se jedná o funkci klesající; pro $a = 1$ je $y \equiv 1$. Pro $x = 0$ platí vždy $y = 1$ - obr.1.



Obr.1. Kvalitativní znázornění průběhu exponenciální funkce.

V elektrotechnické teorii a praxi má zvláštní místo exponenciální funkce se základem

$$a = e = 2{,}718\,281\ \ldots$$

kde e je ***Eulerovo číslo***. Potom má funkce zápis

$$y = e^x \equiv \exp(x) \tag{2}$$

nebo obecněji

$$y = e^{kx} \equiv \exp(k \cdot x) \tag{3}$$

kde k může být libovolné komplexní číslo (reálná hodnota je pak pouze speciálním případem). Některé hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1. Některé hodnoty funkce (3) pro $k = \pm 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
exp(x)	0,0498	0,135	0,368	1	2,718	7,389	20,09
exp(-x)	20,09	7,389	2,718	1	0,368	0,135	0,0498

Rozvoj funkce* (3) *v exponenciální řadu: Lze odvodit, že platí

$$e^{kx} = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \ldots + \frac{(kx)^m}{m!} + \ldots \tag{4}$$

Pro velmi malé hodnoty kx často stačí pro popis skutečnosti použít pouze první dva členy řady - viz tabulka 2:

$$e^{kx} \cong 1 + kx \tag{5}$$

Tabulka 2. Porovnání vztahu (5) s přesnou hodnotou funkce.

kx	0,3	0,2	0,1	0,05	0,00	-0,05	-0,1	-0,2	-0,3
exp(kx)	1,345	1,221	1,105	1,051	1,000	0,951	0,905	0,819	0,741
1 + (kx)	1,300	1,200	1,100	1,050	1,000	0,950	0,900	0,800	0,700

Součin exponenciálních funkcí

Z obecné definice mocniny je zřejmé, že

$e^{\alpha} = e \cdot e \cdot \ldots \cdot e$ - celkem α - krát

$e^{\beta} = e \cdot e \cdot \ldots \cdot e$ - celkem β - krát

takže

$$e^{\alpha} \cdot e^{\beta} = (základ\ e\ \alpha - krát) \cdot (základ\ e\ \beta - krát) = (základ\ e\ \text{celkem}\ (\alpha + \beta) - krát) = e^{\alpha+\beta}$$

tedy

$$e^{\alpha} \cdot e^{\beta} = e^{\alpha+\beta} \tag{6}$$

Převrácená hodnota exponenciální funkce

$$\frac{1}{e^{\alpha}} = \frac{1}{e^{\alpha}} \cdot \frac{e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}}{e^{\alpha-\alpha}} = e^{-\alpha} \tag{7}$$

Podíl exponenciálních funkcí

$$\frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} = \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} \cdot \frac{e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}} = \frac{e^{\beta-\alpha}}{e^{\alpha-\alpha}} = e^{\beta-\alpha} \tag{8}$$

Derivace exponenciální funkce

Derivace funkce $y = f(x)$ je obecně definována vztahem

$$y' = dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{9}$$

Požijme tento vztah pro (3):

$$(e^{kx})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{k(x+\Delta x)} - e^{kx}}{\Delta x} = e^{kx} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{k\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left| vztah(5) \right| = e^{kx} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + k\Delta x - 1}{\Delta x} = k \cdot e^{kx}$$

tedy zapsáno "zkráceně"

$$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx} \tag{10}$$

Pro obecný základ platí, že $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Integrál exponenciální funkce

Integrál je inverzní funkcí k derivaci. Musí platit $\int (e^{kx})' dx = e^{kx} = \int k \cdot e^{kx} dx = k \int e^{kx} dx$, tedy

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + K \qquad (11)$$

Derivujeme-li obě strany rovnice (11), opravdu dospějeme k rovnosti $e^{kx} = e^{kx}$ (K je konstanta). Obdobným postupem získáme vztah $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + K$.

Eulerův vztah

Dosaďme do vztahu (4): $k = \mathrm{j} = \sqrt{-1}$, $x = \alpha$ (nebo prostě do (2) $x = j\alpha$). Dostaneme

$$e^{j\alpha} = 1 + \frac{j\alpha}{1!} + \frac{(j\alpha)^2}{2!} + \frac{(j\alpha)^3}{3!} + \frac{(j\alpha)^4}{4!} + \ldots = 1 + j\frac{\alpha}{1!} - \frac{(\alpha)^2}{2!} - j\frac{(\alpha)^3}{3!} + \frac{(\alpha)^4}{4!} \ldots.. =$$

$$= \left(1 - \frac{(\alpha)^2}{2!} + \frac{(\alpha)^4}{4!} \ldots.\right) + j \cdot \left(\frac{\alpha}{1!} - \frac{(\alpha)^3}{3!} \ldots..\right) = \left|\text{postupně se jedná o řadu definující } \cos\alpha \text{ a } \sin\alpha\right| =$$

$$= \cos\alpha + j\sin\alpha$$

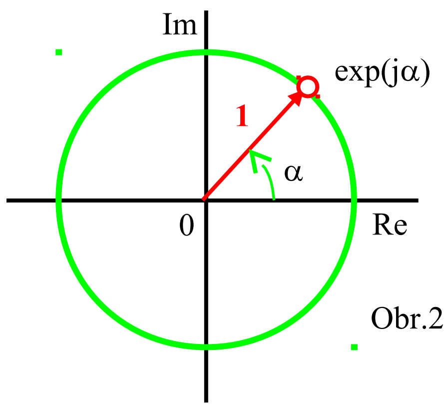
tedy

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \qquad (12)$$

Dále

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j\sin(-\alpha) = \cos\alpha - j\sin\alpha \qquad (13)$$

Je zřejmé, že modul čísla $\left|e^{j\alpha}\right| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, zobrazením je tedy kružnice kolem počátku (komplexní roviny) - v závislosti na velikosti úhlu α -obr.2.



Obr.2. Znázornění funkce exp(jα).

Snadno také určíme, že $e^{\beta \pm j\alpha} = e^{\beta} \cdot e^{\pm j\alpha} = e^{\beta} \cdot (\cos\alpha \pm j\sin\alpha)$.

Vyjádření goniometrických funkcí z Eulerova vztahu, jejich derivace a integrály

Ze součtu a rozdílu vztahů (12) a (13) snadno určíme, že

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \qquad (14) \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} \qquad (15)$$

Derivací vztahů (14) a (15) - s využitím vědomostí o derivaci exponenciální funkce - snadno

určíme, že $(\cos\alpha)' = j\dfrac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{j} = \dfrac{1}{j}\cdot\dfrac{j}{j} = \dfrac{j}{j^2} = -j; \\ -\dfrac{1}{j} = j \end{array} \right| = -\dfrac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} = -\sin\alpha$

tedy

$$(\cos\alpha)' = -\sin\alpha \qquad (16)$$

a

$$(\sin\alpha)' = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} = \cos\alpha \qquad (17)$$

Obdobně bychom určili, že

$$(\cos k\alpha)' = -k\cdot\sin k\alpha \quad (18) \qquad\qquad (\sin k\alpha)' = k\cdot\cos k\alpha \qquad (19)$$

Při integrování bychom obdobně pracovali se vztahy (14), (15) a (11):

$$\int \sin k\alpha \cdot d\alpha = -\frac{\cos k\alpha}{k} + K \quad (20) \qquad\qquad \int \cos k\alpha \cdot d\alpha = \frac{\sin k\alpha}{k} + K \quad (21)$$

Moivrův vztah

Ze získaných vztahů můžeme snadno určit $(e^{j\alpha})^n = (\cos\alpha + j\sin\alpha)^n$, ale současně musí platit, že $(e^{j\alpha})^n = e^{jn\alpha} = \cos n\alpha + j\sin n\alpha$. Platí proto Moivrův vztah

$$(\cos\alpha + j\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + j\sin n\alpha \qquad (22)$$

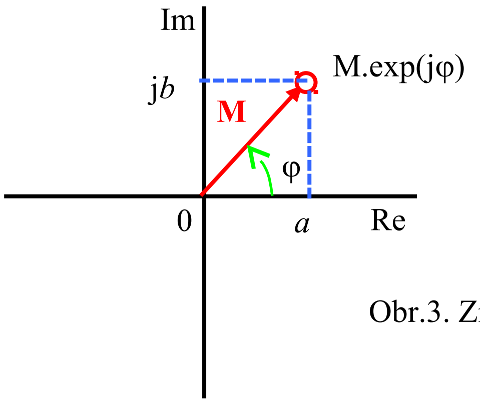
Vyjádření komplexního čísla v exponenciálním tvaru

Mějme komplexní číslo $\hat{M} = a + jb$. Z vlastností pravoúhlého trojúhelníka určíme, že modul (přepona trojúhelníka - obr.3) je $M = \sqrt{a^2+b^2}$; dále musí platit $a = M\cos\varphi$ a také $b = M\sin\varphi$. Potom lze psát

$$\hat{M} = a + j'b = M\cos\varphi + jM\sin\varphi = M(\cos\varphi + j\sin\varphi) = Me^{j\varphi} \qquad (23)$$

kde

$\cos\varphi = a/M$; $\sin\varphi = b/M$; $\mathrm{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi = b/a$.



Obr.3. Znázornění funkce komplexního čísla.

Odmocnina komplexního čísla

Mějme komplexní číslo $\hat{M} = a + jb = Me^{j\varphi}$; $M = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\mathrm{tg}\varphi = b/a$. Hledejme číslo $\hat{N} = Ne^{j\psi}$, pro které platí

$$\sqrt[n]{\hat{M}} = \sqrt[n]{Me^{j\varphi}} = \hat{N} = Ne^{j\psi}$$

tedy je n - tou odmocninou čísla $\hat{M}$. Pracovat budeme s rovnicí

$$\sqrt[n]{Me^{j\varphi}} = Ne^{j\psi}$$

Jestliže celou rovnici umocníme číslem n, dostáváme

$$Me^{j\varphi} = (Ne^{j\psi})^n$$

tedy i

$$Me^{j\varphi} = N^n e^{jn\psi}.$$

Tato rovnice je splněna, jestliže platí

$$M = N^n \Rightarrow N = M^{1/n}$$

a dále (díky periodicitě goniometrických funkcí)

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \psi = (\varphi + 2k\pi)/n$$

přičemž různé kořeny obdržíme pro $k = 0, 1, 2, ...(n - 1)$, (potom se již kořeny opakují). Platí proto, že odmocnina je definována vztahem

$$\sqrt[n]{Me^{j\varphi}} = M^{1/n} \cdot \exp(j(\varphi + 2k\pi)/n) \qquad (24)$$

Příklad 1. Určete třetí odmocninu čísla 1 v oboru komplexních čísel.
Řešení: Číslo 1 zapíšeme v podobě $1 = 1.(\cos 0 + j\sin 0)$, tedy $\varphi = 0$. Třetí odmocnině odpovídá $n = 3$. Potom můžeme psát:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \cdot (\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + j\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}) \text{ pro } k = 0;\ 1;\ 2$$

tedy vyhovují čísla (argumenty goniometrických funkcí jsou ve stupních; rozepiš (24) do složkového tvaru)

$$\hat{N}_1 = \hat{N}(k=0) = 1$$

$$\hat{N}_2 = \hat{N}(k=1) = 1.(\cos 120 + j\sin 120) = -\frac{1}{2}\cdot(1 - j\sqrt{3})$$

$$\hat{N}_3 = \hat{N}(k=2) = 1.(\cos 240 + j\sin 240) = -\frac{1}{2}\cdot(1 + j\sqrt{3})$$

Zobrazení těchto čísel na kružnici (obr.2, komplexní rovina) je zřejmé.

Příklad 2. Máme číslo $\hat{M} = 1 + j = \sqrt{2}\cdot e^{j45}$. Určete 4. odmocninu čísla.
Řešení: Pro $n = 4$ platí (úhly jsou ve stupních)

$$\sqrt{\hat{M}} = (\sqrt{2})^{1/4}\cdot\exp(j(45+2k\pi)/4) \text{ pro } k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Protože $(\sqrt{2})^{1/4} = \sqrt[8]{2} = 1{,}0905$, můžeme určit, že

$$\hat{N}_1 = \hat{N}(k=0) = 1{,}0905.\exp(j(45)/4) = 1{,}095\cdot(\cos 11{,}25 + j\sin 11{,}25) =$$
$$= 1{,}0905\cdot(0{,}9808 + j0{,}1951)$$

$$\hat{N}_2 = \hat{N}(k=1) = 1{,}0905.\exp(j101{,}25) = 1{,}0905\cdot(-0{,}1951 + j0{,}9808)$$

$$\hat{N}_3 = \hat{N}(k=2) = 1{,}0905.\exp(j191{,}25) = 1{,}0905\cdot(-0{,}9808 - j0{,}1951)$$

$$\hat{N}_4 = \hat{N}(k=3) = 1{,}0905.\exp(j281{,}25) = 1{,}0905\cdot(+0{,}1951 - j0{,}9808)$$

Zobrazení těchto čísel na kružnici je i zde zřejmé.

Funkce sinhx a coshx

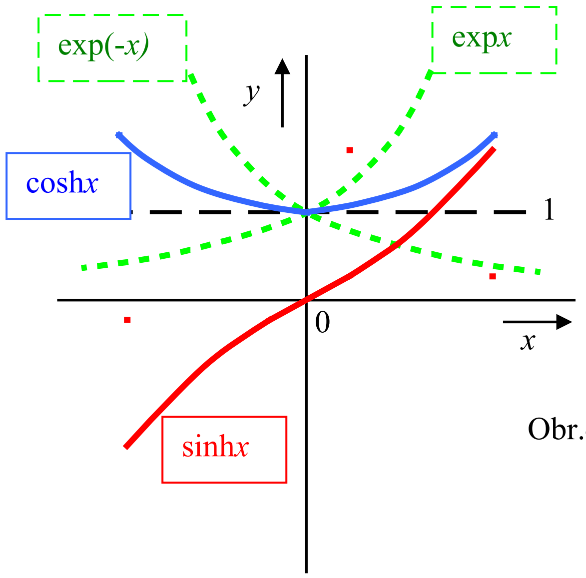
Hyperbolické funkce jsou definovány pomocí funkce exponenciální následovně:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (25) \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (26)$$

Kvalitativně je průběh těchto funkcí znázorněn na obr.4 (viz i hodnoty v tabulce 1).

Jestliže zvolíme $x = j\alpha$, snadno určíme, že

$$\sinh j\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} = j\sin\alpha \quad (28) \qquad \cosh j\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos\alpha \quad (29)$$



Obr.4. Kvalitativní znázornění průběhu hyperbolických funkcí.

Aplikací definičních vztahů snadno určíme další relace:

$$(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x) \qquad (30)$$

$$(\sinh x)^2 - (\cosh x)^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = 1 \qquad (31)$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \qquad (32)$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \qquad (33)$$

$$\int \cosh x dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + e^{-x}/(-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \qquad (34)$$

$$\int \sinh x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}/(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \qquad (35)$$

Využití exponenciální funkce při řešení lineárních diferenciálních rovnic bude předvedeno v materiál: **Exponenciální funkce - jejich "využití" při řešení diferenciálních rovnic.**

Literatura:

[1] Kohlman, Č.: ***Matematika ve sdělovací technice***. SNTL, Praha 1960
[2] Rektorys, K.: ***Co je a k čemu je vyšší matematika.*** ACADEMIA, Praha 2001
[3] Kvasnica, J.: ***Matematický aparát fyziky.*** ACADEMIA, Praha 1997 (2. vydání)
[4] Devlin , K.: ***Jazyk matematiky.*** Argo a Dokořán, Praha 2002
[5] Angot, A.: ***Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry.*** SNTL, Praha 1971